1. Výroková logika

1. Určete, které zápisy představují výroky, které hypotézy, které výrokové formy a které nejsou výroky. U výroků určete pravdivostní hodnotu.

a)	$5.3 + 12 \rangle 26$	[výrok, 1]
b)	Kolik je hodin?	[není výrok]
c)	$2x + 3 \langle 0$	[výroková forma]
d)	$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = i\sqrt{2}$	[výrok, 0]
e)	Pro každé reálné číslo x platí $\lvert\sin x\rvert \le 1$	[výrok, 1]
f)	Mimo naši Sluneční soustavu existuje život.	[hypotéza]
g)	Středoškolská matematika	[není výrok]
h)	Přímka p je rovnoběžná s přímkou q.	[výroková forma]
i)	$\{x^2 + 4 = 0, x \in R\} = \emptyset$	[výrok, 1]
j)	$\{x^2 + 4 = 0, x \in C\} \neq \emptyset$	[výrok, 1]
k)	$\log x = 10$	[výroková forma]

2. Negujte výroky:
   1. V naší třídě je 25 studentů.
   2. Každý člověk se zmýlí.
   3. Na výlet nás půjde alespoň 12.
   4. Na louce jsou všechny květy žluté.
   5. Žádný maturant nepropadl.
   6. Existuje kvadratická rovnice, která nemá řešení.
   7. Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je rovnoramenný.
   8. Číslo 11 je prvočíslo a zároveň liché číslo.
   9. Číslo je sudé, právě když je dělitelné dvěma.

   [řešení:
   a) V naší třídě je nejvýše 24 nebo alespoň 26 žáků.
   b) Existuje člověk, který se nemýlí.
   c) Na výlet nás půjde nejvýše 11.
   d) Alespoň jeden květ na louce není žlutý.
   e) Alespoň jeden maturant propadl.
   f) Každá kvadratická rovnice má alespoň jedno řešení.
   g) Trojúhelník je rovnostranný a není rovnoramenný.
   h) Číslo 11 není prvočíslo nebo není liché číslo.
   i) Číslo je sudé a není dělitelné dvěma nebo číslo není sudé a je dělitelné dvěma.]

3. Co je negací výroku: Alespoň jeden z nás to nespočítá.
   - přinejmenším já to spočítám
   - nikdo to nespočítá [Každý to spočítá.]
   - každý to spočítá
   - více než jeden z nás to spočítá
   - více než jeden z nás to nespočítá

4. Vytvořte negovaný, obrácený a obměněný výrok: Nebude-li pršet, nezmokneme.

   [Negace: Nebude pršet a zmokneme; Obrácená věta: Jestliže nezmokneme, pak nebude pršet; Obměna: Jestliže zmokneme, pak bude pršet.]

5. Ověřte, zda se jedná o tautologii? $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ [ano]

6. Zapište tabulkou pravdivostní hodnotu složeného výroku:

$a)$ $(X' \vee Z') \Rightarrow X$

$b)$ $(X \Rightarrow Y') \vee (X' \Rightarrow Y)$

7. Má-li Petr dva lístky do kina, půjde s ním Pavel. Petr však dva lístky nedostal. Plyne z toho, že Pavel do kina nešel? [ne, nesprávný úsudek]

8. Petr si řekl: Budu-li se snažit, příklad vyřeším nebo se alespoň řešení přiblížím. Příklad nevyřešil, ani se řešení nepřiblížil. Plyne z toho, že se nesnažil? [ano, správný úsudek]

2. Množinové operace

1. Pomocí Vennových diagramů rozhodněte, zda pro všechny množiny A, B, C dané základní množiny U platí vztahy:
   a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ [ano]
   b) $(A \cap B \cap C) \cup [B \cap (A' \cup C')] = B$ [ano]

2. Ve Vennově diagramu znázorněte:
   a) (A – B´) ∩ B
   b) (A´– C) ∩ (B´– A)

3. Jsou dány množiny: A = $\{x \in N, 1 \leq x \leq 9, x - sudé\}$, B = $\{x \in N, x \leq 5\}$, C = $\{3,5\}$. Určete:
   a) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
   b) $A - B, B - A$
   c) C'_B
   d) množinu *D* tak, aby $D \subset A \wedge$ množiny *B*,*D* byly disjunktní
   e) všechny podmnožiny množiny *C*

[a){2,4}, b) {6,8}, {1,3,5}, c) {1,2,4}, d) např. {6}, e) { }, {3}, {5}, {3,5}]

4. Zapište dané množiny pomocí intervalů a určete: $A \cap B, A \cup C, C - E, E'_D$
   $A = \{x \in R : |x - 3{,}5| \leq 4{,}5\}$
   $B = \{x \in R : -3 \langle x \langle 2\}$
   $C = \{x \in R : x \leq 2\}$
   $D = R$
   $E = \{x \in R : |x - 2| \geq 1\}$

[A = <-1; 8>, B = (-3; 2), C = (-∞; 2>, D = (-∞; +∞), E = (-∞; 1> U <3; +∞), A ∩ B = <-1; 2), A U C = (-∞; 8>, C – E = (1; 2>, E´$_D$ = (1; 3)]

5. Určete graficky kartézský součin $A \times B, A \times C$: $A = \{-1,2,3\}, B = \{2,4\}, C = (1,3\rangle$

6. V anketě odpovídali 102 studenti na tři otázky. První otázku zodpovědělo 36 studentů, druhou 38, třetí 32, první i druhou 18, první i třetí 12, druhou i třetí 7 a na všechny otázky odpovědělo 5 studentů. Kolik studentů odpovědělo pouze na jednu otázku a kolik nezodpovědělo vůbec žádnou? Kolik studentů odpovědělo alespoň na dvě otázky?

   [Pouze na jednu otázku odpovědělo 47 studentů, vůbec žádnou nezodpovědělo 28 studentů. Alespoň na dvě otázky odpovědělo 27 studentů.]

7. Klub důchodců uspořádal sběr léčivých rostlin. Dva důchodci se ze zdravotních důvodů nemohli sběru zúčastnit, ostatní se rozhodli sbírat hluchavku, bez a podběl. Všechny tři byliny sbíralo 7 důchodců, hluchavku i bez 15 důchodců, hluchavku i podběl 12 důchodců. Podběl sbíralo 21, bez 23, stejně jako hluchavku. Bez nebo podběl sbíralo 31 důchodců. Určete: Kolik procent důchodců klubu se do sběrové akce zapojilo? Kolik důchodců sbíralo bez i podběl? Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný důchodce sbíral podběl a přitom nesbíral hluchavku?

   [Do sběru se zapojilo 94,44 % důchodců. Bez i podběl sbíralo 13 důchodců. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný důchodce sbíral podběl a přitom nesbíral hluchavku, je ¼, tedy 25 %.]

8. Ze 32 lidí jich 22 má rádo ryby. Na houbách si rádo pochutná o 4 osoby méně. Těch, kteří jí houby nebo ryby, je 7krát více než těch, kteří houby ani ryby nejedí. Kolik z dotázaných jí ryby i houby? [12]

9. Ze sta žáků se 30 učí němčinu, 28 španělštinu a 42 angličtinu. 8 se učí španělštinu i němčinu, 10 se učí španělsky i anglicky a je to dvojnásobek počtu těch, kteří se rozhodli pro němčinu i angličtinu. Desetina počtu žáků, kteří se učí němčinu, se k němčině učí ještě španělštinu i angličtinu. Kolik žáků se učí jen angličtinu, kolik se učí němčinu, ale neovládá angličtinu a kolik žáků se neučí žádný z těchto tří jazyků?

   [Jen angličtinu se učí 30 žáků. Němčinu se učí, ale neovládá angličtinu 25 žáků. Žádný z těchto jazyků se neučí 20 žáků.]

3. Funkce

1. Načrtněte grafy funkcí, určete jejich vlastnosti:

a) $y = |x-3|+1$
b) $y = x^2 - 3x + 1$
c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 3$
d) $y = \log|x|$
e) $y = |\log|x||$
f) $y = 3\sin 4x$
g) $y = \frac{2x}{x+1}$
h) $y = |x^5| - 3$

[a) D(f) = R, H(f) = <1; +∞), na (-∞; 3) klesající, na <3; +∞) rostoucí, ani sudá, ani lichá, není prostá, omezená zdola d = 1, ostré minimum v x = 3
b) D(f) = R, H(f) = $<-\frac{5}{4}$; +∞), na (-∞; $\frac{3}{2}$) klesá, na $<\frac{3}{2}$; +∞) roste, není prostá, omezená zdola d = $-\frac{5}{4}$, ostré minimum v x = $\frac{3}{2}$, ani sudá, ani lichá
c) D(f) = R, H(f) = (3; +∞), rostoucí, prostá, ani sudá, ani lichá, omezená zdola d = 3
d) D(f) = R – {0}, H(f) = R, na (-∞; 0) klesající, na (0; +∞) rostoucí, není prostá, sudá, není omezená, ani maximum, ani minimum
e) D(f) = R – {0}, H(f) = <0; +∞), klesající na (-∞; -1) U (0; 1), rostoucí na <-1; 0) U <1; +∞), není prostá, sudá, omezená zdola d = 0, minimum v -1 a 1
f) D(f) = R, H(f) = <-3; 3>, rostoucí na $\left\langle \frac{3}{8}\pi + \frac{k\pi}{2}; \frac{5}{8}\pi + \frac{k\pi}{2}; \right\rangle$, klesající na $\left\langle \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{3}{8}\pi + \frac{k\pi}{2}; \right\rangle$, periodická p = $\frac{\pi}{2}$, omezená zdola d = -3, omezená shora h = 3, lichá, maximum v $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, minimum v $\frac{3}{8}\pi + \frac{k\pi}{2}$
g) D(f) = R – {-1}, H(f) = R – {2}, rostoucí na (-∞; -1) U (-1; +∞), prostá, nemá maximum ani minimum, není omezená, ani sudá, ani lichá
h) D(f) = R, H(f) = <-3; +∞), rostoucí na <0; +∞), klesající na (-∞; 0), není prostá, ostré minimum v 0, omezená zdola d = -3, sudá.]

2. Nádoba o objemu 3000 litrů se naplní dvěma přívody současně za 12 minut. Plní-li se pouze jedním přívodem, naplní se za 30 minut, což je o 10 minut delší doba než plní-li se jen druhým přívodem. Určete vlastnosti funkce popisující změnu objemu vody v nádobě v závislosti na čase při otevření:
   a) 1. přívodu
   b) 2. přívodu
   c) obou přívodů současně
   a zakreslete případy a), b), c) do společného grafu.

[f_1: y = 100x, f_2: y = 150x, f_{1+2}: y = 250x]

3. Řešte graficky:
   a) $x^2 - 4x + 3 = x + 6$
   b) $2 \le |x^2 - 2x - 15| \le 3 + x$
   c) $|x-4| \le -|x-1| + 6$

4. Zjistěte funkci f, která udává závislost obvodu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce:
   a) jeho odvěsny
   b) jeho přepony.
   [a) $o = a.(2+\sqrt{2})$; b) $o = c.(\sqrt{2}+1)$]

5. Jsou dány funkce:

   a) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

   b) $y = \sqrt{\dfrac{2 - x}{x + 3}}$

Určete: D(f), pro která x je funkční hodnota rovna 0, f(5).

[a) D(f) = (-∞; 1> U <4; +∞), x_1 = 1, x_2 = 4, f(5) = 2, b) D(f) = (-3; 2>, x = 2, f(5) neexistuje]

6. Je dána funkce f: $y = \dfrac{(x-2)(x+4)}{\sqrt{x-3}}$. Určete D(f), pro která x je funkční hodnota rovna 0, f(12) a f(-1).

[D(f) = (3, ∞), x_1 = 2, x_2 = -4, f(12) = 160/3, f(-1) neexistuje.]

7. Zjistěte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní. Pokud ano, napište rovnici této inverzní funkce a určete její definiční obor a obor hodnot. Sestrojte grafy dané funkce i funkce inverzní.

   a) $y = x^2 - 5$, D(f) = $\left(-\infty, -1\right\rangle$

   b) $y = 5x - 3$, D(f) = $\left\langle 2, 4\right)$

[a) f^{-1} : $y = \sqrt{x+5}$, D(f^{-1}) = <-4, ∞), H(f^{-1}) = (-∞, -1>; b) f^{-1} : $y = \dfrac{x+3}{5}$, D(f^{-1}) = <7, 17), H(f^{-1}) = <2, 4)]

4. Lineární funkce

1. Sestrojte graf funkce: a) $y = 3x - |x+1| + |2x| - 5|1-x|$

   b) $y = x + 2|1-x| + |x+1| - |x|$

   c) $y = |x| - 2|x+1| + 3|x+2|, x \in (-5,4)$

2. Řešte nerovnici: a) $|x+1| - |x-2| + |x-5| \leq 6$

   b) $|x+1| + |x-3| - 2|x| - 3 \geq 0$

   c) $\dfrac{3}{|6x-1|} \leq 5$

3. Řešte rovnice s parametrem a: a) $ax - 2a = 3x + 12$

   b) $\dfrac{5x+2}{a-3} - \dfrac{2}{3}x = 4$

   c) $x + 1 - \dfrac{2x+a+1}{a} = \dfrac{a-x}{a}$

4. Řešte rovnice s parametry m, n: a) $\dfrac{x+m}{x-n} + \dfrac{x+n}{x-m} = 2$

   b) $\dfrac{y}{m} + \dfrac{y}{n} = \dfrac{m+n}{mn}$

5. Řešte graficky: a) $x + 1 \geq y \wedge x + y \geq 1$

   b) $2x + 3y \geq 15 \wedge 3x - y = 7$

6. Řešte graficky: a) $|x| + |x+1| = x + |2-x|$

   b) $2|x| + 3 - x \leq 2x + |x+1|$

7. Karel vyjel na chatu v 7 hodin, jeho rodiče o 20 minut později. Všichni dorazili na chatu současně. Jak je vzdálená chata, jede-li Karel průměrnou rychlostí 20 km/hod a rodiče urazí v průměru jeden kilometr za minutu? V kolik hodin přijeli všichni na chatu? Řešte početně i graficky.

8. Bazén se naplní prvním přítokem za 6 hodin, druhým za 9 hodin. Přidáme-li třetí přítok, bude bazén naplněn všemi přítoky současně za 2 hodiny. Za kolik hodin se bazén naplní pouze třetím přítokem?

Výsledky:

2. a) K = $\langle -4; 8 \rangle$

   b) K = $\left\langle -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right\rangle$

   c) K = $\left(-\infty; \dfrac{1}{15}\right> \cup \left< \dfrac{4}{15}; \infty\right)$

3. a) $a = 3 \rightarrow K = \emptyset, a \neq 3 \rightarrow K = \left\{\dfrac{2(a+6)}{a-3}\right\}$

   b) $a = 3 \rightarrow K = \emptyset, a = \dfrac{21}{2} \rightarrow K = \emptyset, a \neq \dfrac{21}{2} \rightarrow K = \left\{\dfrac{6(2a-7)}{21-2a}\right\}$

   c) $a = 0 \rightarrow K = \emptyset, a = 1 \rightarrow K = \emptyset, a \neq 1 \rightarrow K = \left\{\dfrac{a+1}{a-1}\right\}$

4. a) $m = -n \rightarrow K = R - \{m; n\}, m \neq -n \rightarrow K = \left\{\dfrac{m+n}{2}\right\}, m = n \rightarrow K = \emptyset;$

   b) $m = n = 0 \rightarrow K = \emptyset, m = -n \neq 0 \rightarrow K = R, m \neq -n \rightarrow K = \{1\}$

6. a) $x_1 = -1,5;\ x_2 = 0,5$

b) $x \in <1;\ \infty)$

7. Na chatu přijeli všichni v 7:30 hod. a chata je vzdálená 10km.
8. Bazén se naplní pouze třetím přítokem za 4,5hod.

5. Kvadratická funkce

1. Sestrojte graf funkce:

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = -x^2 - 6x - 8$

c) $y = \left| x^2 - 2x - 2 \right|$

d) $y = -0{,}5x^2 + x + 2$

e) $y = \left| -x^2 + 4x + 1 \right|$

f) $y = -2x\left| x - 3 \right|$

2. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \log\left(2x^2 - |4x| + 1\right)$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{3x - 2}}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x - 28}}{\log|x| - 1}$

3. Řešte rovnice s parametrem m:

a) $x^2 + 2(m-4)x + m^2 + 6m = 0$

b) $x^2 - 2(2m-3)x + 4m - 3 = 0$

4. Řešte početně i graficky nerovnici: $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

5. Zapište všechny kvadratické rovnice, které mají kořeny:

a) čtyřikrát větší
b) o čtyři větší
c) převrácené
d) opačné

než jsou kořeny rovnice $x^2 - 9x + 15 = 0$.

6. Řešte nerovnice:

a) $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 5x + 4} \leq 0$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 15}{x^2 + 2x} \geq 0$

Výsledky:

2. a) $D_f = \left(-\infty; -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$

b) $D_f = (\frac{2}{3}; 1 > \cup < 3; \infty)$

c) $D_f = (-\infty; -10) \cup (-10; -7 > \cup < 4; 10) \cup (10; \infty]$

3. a) $D = -8(7m - 8); D = 0 \rightarrow m = \frac{8}{7} \rightarrow x = \frac{20}{7};$

$D > 0 \rightarrow m < \dfrac{8}{7} \rightarrow x_{1,2} = -(m-4) \pm \sqrt{-14m + 16}; D > 0 \rightarrow m > \dfrac{8}{7} \rightarrow K = \emptyset$

b) $D = 16m^2 - 64m + 48; D = 0 \rightarrow m_1 = 3, m_2 = 1 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1;$

$D > 0 \rightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty) \rightarrow x_{1,2} = (2m-3) \pm 2\sqrt{m^2 - 4m + 3};$

$D < 0 \rightarrow m \in (1; 3) \rightarrow K = \emptyset$

4. $K = \langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$

5. a) $x^2 - 36 + 240 = 0$
   b) $x^2 - 17x + 67 = 0$
   c) $15x^2 - 9 + 1 = 0$
   d) $x^2 + 9 + 15 = 0$

6. a) $K = (\ 1; 3 > \cup (\ 4; 5 >$
   b) $K = (-\infty;\ -2) \cup\ (0;\ \infty)$

6. Mocninné funkce

1. Načrtněte graf funkce, určete její vlastnosti:

a) $y=-\left|\frac{1}{x}\right|$

b) $y=-\frac{1}{x+1}$

c) $y=\frac{1}{x+2}-1$

d) $y=(x+2)^{-2}$

e) $y=x^{-5}-1$

f) $y=x^3+2$

g) $y=(x+1)^4$

h) $y=\frac{2-x}{3-2x}$

i) $y=\left|\frac{x+3}{x+1}\right|$

j) $y=\frac{x-1}{|x+1|}$

2. Řešte graficky:
a) $x^{-7}\rangle x^6$
b) $x^{-4}\geq x^3$
c) $x^3 < x^4$
d) $x^{-4} > x^5$
e) $-x^3 \leq x^6$

3. Upravte výraz: $\frac{3x+14}{x+4}-\left(\frac{x-4}{x+6}\right)^2.\left(\frac{x+21}{16-8x+x^2}-\frac{x+3}{16-x^2}\right)$

4. Vypočtěte:

a) $40.\left(5-\sqrt{5}\right)^{-2}$ b) $\left(-3-\sqrt{5}\right)^2+\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{5}-1\right)^2$ c) $\frac{2^{-2}+2^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5(-2)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$

5. Upravte výrazy:

a) $\left(\frac{c^{-3}d^2}{2a^{-1}b^4}\right)^{-2}.\left(\frac{2a^{-2}b}{c^{-1}d^{-2}}\right)^{-3}$ b) $\sqrt{\frac{\sqrt{x}.\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}.\sqrt{y}}}$ c) $\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+\frac{2x^2\sqrt{x}}{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$

d) $\left[\frac{\left(c^{\frac{1}{4}}.d^{-1}\right)^{-1}}{a^{-2}.\sqrt{b}}\right]^{-3}.\left[\frac{c^{\frac{3}{4}}.\sqrt[3]{d^2}}{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^4}\right]^{-1}$ e) $\frac{\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}{a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}$

6. Je dán zlomek: $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

Určete: a) pro která x je zlomek definován
b) pro která x je hodnota zlomku rovna nule
c) pro která reálná x nabývá zlomek kladných hodnot.

Výsledky:

2. a) $x\in(0;1)$
b) $x\in(-\infty;0)\cup(0;1>$

c) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
d) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$
e) $x \in (-\infty; -1 > \cup < 0; \infty)$

3. $x = 3, x \neq \pm 4, x \neq -6$

4. a) $3 + \sqrt{5}$
b) $12\sqrt{5} - 1$
c) $-\frac{1}{11}$

5. a) $\frac{a^4 b^5 c^3}{2d^{10}}$
b) $\sqrt[12]{\frac{x}{y}}$
c) $3, x \neq y, x \geq 0, y \geq 0$
d) $\frac{b\sqrt{b}}{a^3 d^3 \sqrt[5]{a d^2}}$
e) $\frac{1}{\sqrt{ab}}, a > 0, b > 0$

6. a) $D_f = R - \{-2,; \pm 1\}$
b) pro $x = 2$
c) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

7. Exponenciální funkce

1. Řešte v množině R rovnici:

$a, \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^x}$

$b, \frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$

$c, 9^{x.(x-1)-0,5} = \sqrt{3}$

$d, 0,25^{2-\sqrt{5x+1}} = 4.2^{\sqrt{5x+1}}$

$e, 3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$

$f, 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$

2. Řešte v množině R rovnici: $2^x\left(\frac{1}{8}\right)^{1-x} + 2^{1-x}\left(\frac{1}{8}\right)^x = 1$

3. Řešte v množině R rovnici: $3\left(4^x + 9^{x+1}\right) = 2\left(3 \cdot 4^{x+1} - \frac{9^{x+1}}{4}\right)$

4. Řešte v množině R rovnici: $\sqrt{3^{4x}+1} + \sqrt{2 \cdot 3^{4x}+3} = 5$

5. Řešte v množině R rovnici: $81 \cdot 9^x - 3 \cdot 9^{2x} = -3^{2x-2} + 3$

6. Řešte v množině R rovnici: $\sqrt[x]{81} + \frac{27}{\sqrt[x]{81}} = 12$

7. Řešte v množině R rovnici: $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$

8. Řešte v množině R rovnici: $5^{\log x} + 5^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} + 3^{\log x - 1}$

9. Řešte v *RxR* soustavu rovnic:
$$\sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt{2^y} = 8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2^{x-2}} \cdot \sqrt[3]{2^{y+1}} = 16\sqrt[3]{2}$$

10. Řešte v RxR soustavu rovnic:
$$3^x + 2^{2y} = 13$$
$$3^x - 1 = 2 \cdot 4^y$$

11. Řešte v RxR soustavu rovnic:
$$2^x \cdot 4^y = 8\sqrt{2}$$
$$\ln(x+y) = 0$$

12. Určete, pro která *a* z *R* je exponenciální funkce $y = \left(\frac{a - \frac{3}{2}}{a+4}\right)^x$ a) rostoucí; b) klesající

13. Sestrojte graf funkce a určete vlastnosti funkce:

a) $y = 0,2^{x}$
b) $y = -2^{x}$
c) $y = 3^{x+1}$
d) $y = 3^{x} - 1$

Výsledky:

1. a) 0; b) 3; 9; c)1,5; -0,5 d) 7; e) 2; f) 9
2. 0,5
3. -0,5
4. 0,25
5. $\pm 1{,}5$
6. 2; 4
7. 1,5
8. 100
9. $[8{,}3]$
10. $[2{,}1]$
11. $[-1{,}5; 2{,}5]$
12. a, a $\in$ (- ∞; - 4) b, a $\in$ (1,5; ∞)

8. Logaritmické funkce

1. Řešte graficky: a, $\log_2 x > \log_2 8$
   b, $\log_{0,5} x \geq \log_{0,5} 4$
   c, $\log_x 2 < \log_x 7$
2. Určete definiční obor funkce f: $y = \log(x^2 - 10) + \sqrt{x^2 - 5x}$
3. Určete definiční obor funkce f: $y = \log\left(\frac{x-3}{x+5}\right) + \sqrt{-\frac{1}{x}}$
4. Řešte v R rovnice:
   a) $x^{0,1+0,2\log x} = \sqrt{x}$
   b) $x^{2+3\log x} = 10 \cdot x^{3+\log x}$
   c) $\log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \log\sqrt[8]{x} + \cdots = 2$
   d) $\log(x + 13) - \log(x - 3) = 1 - \log 2$
   e) $2\log 3x^2 + 3\log 4x^3 = 4\log 2x^2 + 4\log 6x$
   f) $1 + \log x^3 = \frac{20}{\log x^2}$
   g) $\frac{5}{3 - \log x} = 3\log 10 - \frac{\log 10}{1 + \log x}$
   h) $9^{x+1} = 12$
   i) $\log x^3 - \log x^4 + \log x^5 = 8$
   j) $\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6$

5. Řešte v RxR soustavy rovnic:
   a) $\frac{xy}{100} = 5$
      $x^{\log y} = 5^2$
   b) $\log x + \log y = \log 100000$
      $\log x - \log y = \log 1000$

Výsledky:

1) $a, x \in (8;\infty)$
   $b, x \in (0;4\rangle$
   $c, x \in (1;\infty)$

2) $x \in (-\infty;-\sqrt{10}) \cup \langle 5;\infty)$

3) $x \in (-\infty;-5)$

4) a) 100 b) $10;\frac{1}{\sqrt{10}}$ c) 10 d) 7 e) 36 f) $\frac{1}{100};\sqrt[3]{10^5}$ g) $10;\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$
   h) 0,1309297 i) 100 j) 2

5) a) $[5;100];[100;5]$ b) [10 000; 10]

9. Goniometrické funkce

1. Dokažte, že platí: cos 54□ = cos 1026□
   sin 740□ = cos 70□
2. Sestrojte grafy funkcí:

$$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2$$

$$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y=(\sin x-\cos x)$$

$$y=-|tgx|$$

$$y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|$$

y = sin 2x – 2
y = cotg x + 2

3. Určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí, je – li:

$$a, \sin\alpha=-\frac{1}{5}\wedge\alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$b, tg\alpha=-2\wedge\alpha\in\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$$

4. Dokažte, že platí:

$$a, \frac{tgx\cdot tg\,2x}{tgx-tg\,2x}=-\sin 2x$$

$$b, \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$c, \sin(x+y)+\cos(x-y)=(\sin x+\cos x)\cdot(\sin y+\cos y)$$

5. Určete definiční obor funkce f: y = $\log\left(\sqrt{3}-tgx\right)$

6. Řešte v R rovnice:

$$a, \frac{1+\sin x}{\cos x}=\cot gx$$

$$b, \cos 2x-\cos x=\sin x-\sin 2x$$

$$c, tgx-\cot gx-\frac{2}{\sqrt{3}}=0$$

$$d, \sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}-\sqrt{2-\sin x-\cos x}=0$$

$$e, \sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

f, $\sin^2 x \cdot \operatorname{cotg} x + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = 1$
g, $\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$

7. Vypočtěte poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, je – li: $a=26{,}5cm\wedge\alpha:\beta:\gamma=2:3:4$

8. Na vrcholu hory stojí věž hradu vysoká v = 30 m. Křižovatku silnic v údolí vidíme z vrcholu věže a

od její paty v hloubkových úhlech □ = 32□50´a □ = 30□10´.Jak vysoko je vrchol hory nad křižovatkou ?

9. Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa A ve výškovém úhlu □ = 39□25´. Přijdeme – li směrem k jeho patě o 50 m blíže na místo B , vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu □ = 58□42´. Jak vysoká je věž ?
10. Na vrcholu kopce stojí rozhledna 30 m vysoká. Její patu a vrchol vidíme z určitého místa v údolí pod výškovými úhly □ = 28□30´a □ = 30□40´. Jak vysoko je vrchol kopce nad horizontální rovinou pozorovaného místa.

Výsledky:

3)
$$a, \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}; tg\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}; \cot g\alpha = 2\sqrt{6}$$
$$b, \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}; \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}; \cot ga = -\frac{1}{2}$$

4) a, b, c platí

5) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$

$a, \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$b, \frac{5\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi; 2k\pi$

$c, \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi$

6) $d, 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$e, k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$f, \frac{\pi}{4} + k\pi$

$g, \pi + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

7) 20,6 cm
8) 272 m
9) 82,1 m
10) 326 m

10. Společné postupy při řešení rovnic

1. Řešte v množině R rovnici: $\sqrt{\frac{7-x}{3+x}}+3\sqrt{\frac{3+x}{7-x}}=4$

2. Řešte v množině R rovnici: $2x^3-3x^2-3x+2=0$

3. Řešte v množině R rovnici: $7x^3+57x^2+57x+7=0$

4. Řešte v množině R rovnici: $6x^3-7x^2-7x+6=0$

5. Řešte v množině C rovnici: $x^{10}-16x^6+ix^4-16i=0$

6. Řešte v množině R rovnici: $24x^3+52x^2+26x+3=0$

7. Řešte v množině C rovnici: $100x^{-4}+21x^{-2}-1=0$

8. Řešte v množině RxR soustavu rovnic: $\frac{7}{x}-\frac{3}{y}=5 \wedge \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3$

9. Řešte v množině R rovnici: $12x^5+37x^4-x^3-x^2+37x+12=0$

10. Řešte v množině R rovnici: $12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0$

11. Řešte pomocí matic soustavy rovnic:a)
$$\begin{aligned} 2x + y \quad &= 8 \\ y + z \quad &= 16 \\ 2z + u &= 20 \\ 4x \quad - u &= 0 \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} 5x - 6y + 3z - u &= 4 \\ -x + y + 2z - u &= 6 \\ 3x + 3y - 2z + u &= 5 \\ x + y + z + u &= 7 \end{aligned}$$

12. Řešte v množině C rovnici: $5x^4-26x^3+10x^2-26x+5=0$

13. Řešte v množině R rovnici: $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$

14. Řešte v množině R rovnici: $3tg^2x+4tgx+4\cot gx+3\cot g^2x+2=0$

Výsledky:

1. $x \in (-3;7); K = \{-2;2\}$
2. $K = \left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$
3. $x_1 = -1;\ K = \left\{-7; -\frac{1}{7};\ -1\right\}$
4. $x_1 = -1;\ K = \left\{-1; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$
5. $K_1 = \{\pm 2;\ \pm 2i\}, K_2 = \left\{\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{6} + i.\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{6}\right)\right\}, K = K_1 \cup K_2$
6. $y = 2x; y = -1; K = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{6}\right\}$
7. $y = x^{-2};\ K = \{\pm 2i;\ \pm 5\}$
8. $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}; K = \left\{\left[-1; -\frac{1}{4}\right]\right\}$
9. $K = \left\{-3, -1, -\frac{1}{3}\right\}$
10. $K = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$

11. a) K= $\left\{\left[\frac{1}{2},7,9,2\right]\right\}$

b) K= $\left\{\left[\frac{3}{2},2,3,\frac{1}{2}\right]\right\}$

12. $K=\left\{5,\frac{1}{5},i,-i\right\}$

13. $K=\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};2\pm\sqrt{3}\right\}$

14. $K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{3}{4}\pi+k\pi\right\}$

11. Komplexní čísla

1. V množině C řešte rovnici: $x^2 + 4x + 5 = 0$

2. V množině C řešte rovnici: $x^2 - 2x + 3 = 0$

3. Pomocí Moivreovy věty umocněte: $(1-i)^{100}$

4. V množině C řešte rovnici: $x^4 + 2 - 2i = 0$

5. V množině C řešte rovnici: $x^6 = 64$

6. Vypočtěte:

   a) $\left| |3-2i|^2 + (3+2i)^2 \right|$

   b) $\left(\frac{-1+i}{i} + \frac{i}{i-1} \right).(2i-3)-(1-2i)^2$

7. Jsou dána komplexní čísla: $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ $\quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} \right)$. Vypočtěte: a) pomocí Moivreovy věty $\left(2\sqrt{3} - 2i\right)^9$

   b) $\frac{z_2}{z_1}$

   c) $z_1.z_2$

8. Řešte v C: $(1-2i)z = 2\bar{z} - i(2+i)$

9. V množině C řešte rovnici a proveďte zkoušku: $\left(5 - \frac{1}{i}\right) \cdot \bar{z} = z \cdot (1-i) + 12$

10. V Gaussově rovině určete graficky množinu všech komplexních čísel Z, pro která platí:
$|z+2| \geq 2 \wedge \left| \frac{z+2i}{z-2i} \right| \leq 1$

11. Zobrazte v Gaussově rovině všechna komplexní čísla z, pro která platí:

   a) $|z-i| \geq |z+1-2i|$

   b) $|2-3i| \geq |z| \rangle |1+2i|$

12. V množině C řešte rovnici: $x^2 - 6ix - 8 = 0$

13. Určete opačné číslo a číslo komplexně sdružené k číslu $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^5$

14. V množině C řešte rovnici: $(1-i)x^2 - (5-i)x + 6 - 4i = 0$

Výsledky:

1. $K = \{-2 \pm i\}$

2. $\boldsymbol{K} = \{1 \pm i\sqrt{2}\}$

3. $K = \{-2^{50}\}$

4. $K = \left\{\sqrt[8]{8}.\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{4} + i.\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{4}\right)\right\}$

5. $K = \bigcup_{k=0,1,\dots 5}\left\{2\left(\cos\frac{k\pi}{3} + i.\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right\}$

6. a) $\sqrt{468}$ b) $K = \left\{-\frac{5}{2} + \frac{11}{2}i\right\}$

7. a) $4^9 i$

   b) $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos\frac{17}{30}\pi + i.\sin\frac{17}{30}\pi\right)$

   c) $4\sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{30}\pi + i.\sin\frac{7}{30}\pi\right)$

8. $K = \{7 + 4i\}$

9. $K = \{3 + i\}$

12. $K = \{2i; 4i\}$

13. $z^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;\ -z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;\ \bar{z} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

14. $K = \{2 + 3i, 1 - i\}$

12. Shodná a podobná zobrazení v rovině

1. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li : $a : b : c = 7 : 4 : 5$, $v_b = 4$ cm.

2. Jsou dány přímky *a, b, c* tak, že $a \parallel b$ a *c* je s nimi různoběžná. Sestrojte kružnici *k*, která se dotýká všech tří přímek.

3. Nalezněte společnou tečnu kružnic *k, l*, je-li $r_1 \neq r_2$.

4. Jsou dány dvě protínající se kružnice *k, l*. Jedním jejich průsečíkem veďte takovou přímku, která vytíná na obou kružnicích shodné tětivy.

5. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $v_c = 3$ c m, $c = 4$ cm, $\gamma = 60°$.

6. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: t_a =6cm, $t_b = 7{,}5$ cm, $t_c = 9$ cm.

7. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dán obvod o = 12 cm, úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

8. Jsou dány dvě soustředné kružnice *k(S*, 4 cm*)* a *l(T*, 3 cm*)* a bod *A* tak, že |*SA*| = 2 cm. Sestrojte všechny čtverce *ABCD* tak, aby $B \in k$, $D \in l$.

9. Jsou dány dvě různoběžné přímky *a*, *b* a úsečka délky *r*. Sestrojte všechny kružnice *k* se středem na přímce *a*, poloměrem *r*, které na přímce *b* vytínají tětivu délky *r*.

10. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2), r_1 \neq r_2$, které se protínají v bodech *C*,*Q*. Sestrojte všechny rovnoramenné $\Delta\ ABC$ (*AB* je základna), pro něž platí: $A \in k_1, B \in k_2$ $|\angle ABC| = 120°$

11. Sestrojte lichoběžník *ABCD* $(AB \| CD)$, je-li dáno: $a = 6{,}5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $d = 3$ cm.

12. Je dána *k(S*, 3,5 cm*)* a *M*: |*SM*| = 2 cm. Sestrojte všechny tětivy kružnice *k*, které jsou bodem *M* děleny v poměru 2:5.

13. Sestrojte čtverec *ABCD*, je-li dán součet strany a úhlopříčky $a + u = 8$ cm.

14. Je dána kružnice *l(O,r)* a její vnější přímka *t* s bodem *A*. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímky *t* v bodě *A* a dané kružnice *l*. (stejnolehlost)

15. Jsou dány kružnice *k(O*, 4 cm*)*, *l(P*, 2 cm*)*, |*OP*| = 9 cm. Sestrojte středy stejnolehlosti S_1, S_2 daných kružnic a vypočtěte jejich vzdálenost.

Výsledky:

1. Homotetie
2. Množiny bodů dané vlastnosti
3. Homotetie
4. Středová souměrnost *S(P)*
5. Množiny bodů dané vlastnosti
6. Středová souměrnost S(*AB)*
7. Osová souměrnost
8. Rotace *R(A*, ±90°)
9. Posunutí
10. Rotace
11. Posunutí

12. Homotetie $H(M, \frac{2}{5})$
13. Osová souměrnost
14. Homotetie
15. Homotetie

13. Stereometrie

1.) Sestrojte řezy těles:

a) Sestrojte řez kvádru ABCDEFGH rovinou $\rho = KLB,\ K \in GH$, $|GK| = \frac{3}{2}|GH|$ a L je střed hrany CG. Sestrojte i průsečnice roviny KLB s podstavou.

b) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM, kde $K \in DH$ tak, že H je středem DK , $L \in AF$, $|AL| = 2|FL|$, $M \in FG$, $|FM| = 3|GM|$..

2.) Je dána krychle ABCDEFGH $|AB| = a$. Určete povrch a objem tělesa ACHF.

3.) V krychli ABCDEFGH o hraně a=5 vypočtěte vzdálenost bodu R= střed CG od AG.

4.) V krychli ABCDEFGH vypočtěte vzdálenost bodu H od úsečky EC, je-li a=5

5.) V kvádru ABCDEFGH $|AB| = a = 5cm, |BC| = b = 4cm, |AE| = c = 8cm$ určete $|A; ET|$; T je střed CG.

6.) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou EHG, kde E je středem hrany AB, H leží na DV tak, že $|DH| = 3|HV|$, $G \in CV$, $|VG| = 2|CG|$.

7.) V pravidelném čtyřstěnu ABCD, a = 6 cm, určete: a) odchylku boční stěny od podstavy
b) odchylku boční hrany od podstavy.

8.) Rotační komolý kužel má průměry podstav $d_1 = 8\sqrt{3}$ cm, $d_2 = 6\sqrt{3}$ cm, rovina podstavy svírá s pláštěm kužele úhel 60°. Určete objem komolého kužele a objem kužele, který doplňuje daný komolý kužel na rotační kužel.

9.) Objem kulové úseče je 45π cm^3, její výška 3 cm. Určete povrch kulové úseče.

10.) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH
a) rovinou KLM : K je střed AE; L střed BC M střed HG.
b) rovinou ALH : L je střed BC

11.) V krychli ABCDEFGH o hraně a = 8 cm vypočítejte úhel $\varphi = AGB$

12.) V kvádru ABCDEFGH určete vzdálenost $|B; EG|$ jestliže $|AB| = 4, |BC| = 6, |AE| = 8$ cm.

13.) V kvádru ABCDEFGH o stranách $|AB|$=a, $|BC| = \frac{a}{2}$, $|AE| = 2a$ určete úhel φ = AGM; M je střed strany CD.

Výsledky:

2.) $V = \frac{a^3}{3}, S = 2a^2\sqrt{3}$
3.) v = 2,04
4.) v = 4,08
5.) x = 6,78
7.) $\alpha = 70°31'$ $\beta = 54°44'$
8.) $V_1 = 111\pi$, $V_2 = 81\pi$

9.) $S = 197{,}82\,\text{cm}^2$
11.) $\varphi = 70°30'$
12.) x = 8,43 cm
13.) $\varphi = 17°42'$

14. Analytická geometrie přímky

1.) Jsou dány body $A = [1,-4], B = [4,5], C = [-3,4]$. Určete pomocí průsečíků os stran střed kružnice opsané a její poloměr.

2.) Určete těžiště $\Delta\ ABC$ a velikost jeho vnitřních úhlů: $A = [2,-2], B = [-3,0], C = [1,5]$

3.) V $\Delta\ ABC$ určete souřadnice průsečíku výšek R a zjistěte jeho vzdálenost od počátku. Napište rovnici úsečky AR. $A = [0,0], B = [3,1], C = [1,2]$.

4.) Je dán trojúhelník ABC: A=$[1,2]$, B=$[2,-3]$, C=$[4,5]$.
Napište:
a) parametrické vyjádření úsečky AB
b) obecnou rovnici výšky na stranu c
c) směrnicový tvar rovnice těžnice na stranu c
d) úsekový tvar rovnice osy strany a

5.) V parametrickém vyjádření přímky **r**: x = 2+t, y = 1+a-2t, t$\in$ R, volte a$\in$ R tak, aby přímka r procházela průsečíkem přímek **p**: (P, $\vec{u}$) a **q** : (Q, $\vec{v}$), kde P = $[1,3]$, $\vec{u}$ = (-1,2), Q = $[1,4]$, $\vec{v}$ = (2, -3).

6.) Na přímce p: 3x – 4y + 1 = 0 najděte bod Q, který má od bodu P $[1,?]$ ležícího na přímce p vzdálenost d = 10.

7.) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-4,2]$ a je:
a) rovnoběžná s přímkou p: 3x -5y +9 = 0
b).kolmá k přímce q: 4x – y + 3 = 0
c) rovnoběžná s osou x
d) rovnoběžná s osou y
e) rovnoběžná s osou I. a III. kvadrantu

8.) Najděte obecné rovnice přímek,které procházejí bodem A = $[2,3]$ a mají od bodu B = $[0,1]$ vzdálenost v = 4.

9.) Napište směrnicový tvar rovnice přímky, která
a) má obecnou rovnici 3x -2y – 8 = 0
b) prochází body $A = [-4,-3], B = [1;4,5]$
c) má směrnici k = $-\frac{1}{3}$ a vytíná na ose y úsek q = 6
d) prochází bodem $A = [3,4]$ a svírá s kladnou poloosou x úhel o velikosti 30°

10.) Zjistěte, zda body $M = [-4;1], N = [-3;2]$ jsou vnitřními body trojúhelníka ABC: $A = [-7;-3], B = [5;1], C = [-2;4]$.

11.) Jsou dány body $A = [-2;2], B = [6;8]$. Bodem A veďte přímku p a bodem B přímku q tak, aby byly vzájemně kolmé a jejich průsečík ležel na ose x.

12.) Jsou dány body $A = [-5;-4], B = [4,6;3,2], C = [2,5;6]$. Napište obecné rovnice os úhlů trojúhelníka ABC, vypočtěte střed kružnice vepsané jako průsečík dvou z nich a ověřte, že jím prochází i třetí osa.

13.) Určete vrchol C trojúhelníka ABC, jsou-li dány body $A = [1;2], B = [-1;0]$ a průsečík výšek $O = [1;-1]$.

14.) Je dán bod $A = [2;4]$ a přímka p: x – 2y + 1 = 0. Určete na p bod R tak, aby přímky AR a p měly odchylku $\frac{\pi}{4}$.

15.) Určete délky stran trojúhelníka ABC, jsou-li dány velikosti jeho výšek $v_a = 9, v_b = 7, v_c = 8.$

Výsledky:

1.) r = 5cm.

2.) T = $[0,1]$, $\alpha = 60°\, 4'\, 6''$,
β =73°8´ 30´´,
γ =46°47´24´´

3.) R = $[1,2]$

4.) b) $\mathbf{v_c}$: x-5y+21=0
c) y = $\frac{11}{5}x - \frac{19}{5}$
d) y= $\frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{4}} = 1$

5.) a = 0

6.) $Q_1 = [9,7]$, $Q_2 = [-7,-5]$

7.) a) 3x -5y +22 = 0
b) x + 4y – 4 = 0
c) y -2= 0
d) x +4 = 0
e) x – y + 6 = 0

8.) p_1 : 4x +3y – 17 = 0
p_2 : y – 3 = 0

9.) a) y = $\frac{3}{2}$x -4
b) $y = \frac{3}{2}x + 3$
c) $y = -\frac{1}{3}x + 6$
d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 - \sqrt{3}$

10.) M je, N není.

11.) p: x + 2y – 2 = 0 q: 2x – y – 4 = 0

$o_a : x - y + 1 = 0;$
$o_b : x + 7y - 27 = 0$

12.) $o_c : x - 2{,}5 = 0$
$S_k = \left[\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$

13.) $C = [0;0]$

14.) $R_1 = [5;3], R_2 = [1;1;]$

15.) $|AB| = 9{,}35$
$|AC| = 10{,}7$
$|BC| = 8{,}31$

15. Analytická geometrie kuželosečky

1.) Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $A = [2;16]$ a dotýká se obou souřadných os.

2.) Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $E = [1,3]$ a má střed na přímce *p*: x-y+4=0 a její poloměr r = 2.

3.) Dokažte, že přímka o rovnici $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ je tečnou křivky o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$, je-li splněna podmínka $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r_2}$. Určete souřadnice bodu dotyku.

4.) Určete souřadnice tečny elipsy $9x^2 + 25y^2 = 225$, která na osách x,y vymezuje **shodné kladné** úseky.

5.) Napište rovnici hyperboly s ohnisky $E = [0,2]$, $F = [0,6]$, která prochází bodem $L = [0,3]$.

6.) Sestavte rovnici paraboly, která prochází body K [5, -2], L [7, 3], M [1, -6] a jejíž osa je rovnoběžná s osou y. Určete souřadnice vrcholu, ohniska a rovnici řídicí přímky.

7.) Sestavte rovnici kružnice k, která prochází body A [2, -1], B [3, 6], C [-1,-2]. Napište rovnici kružnice soustředné s kružnicí k, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

8.) Určete kuželosečku, její střed, vrcholy, ohniska.
a) $25x^2 - 16y^2 - 150x + 224y - 959 = 0$
b) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$

9.) Určete množinu bodů danou rovnicí:
a) $y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$
b) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$

10.) Napište rovnici kružnice k, která má střed $S = [5;4]$ a která na přímce p: $x + 2y - 3 = 0$ vytíná tětivu délky d=8.

11.) Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $A = [4;4]$ a průsečíky kružnice m: $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ s přímkou p: $x + y = 0$

12.) Napište rovnici kružnice, která prochází body $A = [5;3]$, $B = [6;2]$ a jejíž střed leží na přímce p: $3x - 4y - 3 = 0$

13.) Napište rovnici paraboly,která je souměrná podle osy y a prochází body $P = [0;0]$, $A = [6;-2]$

14.) Je dána kružnice k: $x^2 + y^2 = 25$ a bod $A = [1;-2]$.
a) Určete délku tětivy dané kružnice,která je bodem A půlena.
b) Napište rovnici elipsy,která je vepsaná dané kružnici a prochází bodem A (přičemž osy elipsy leží v osách souřadnic).

15.) Určete rovnici tětivy hyperboly $4x^2 - y^2 - 4 = 0$, která je bodem $A = [2;2;]$ půlena.

Výsledky:

1.) $k_1 : (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$

$k_2 : (x-26)^2 + (y-26)^2 = 26$

2.) $k_{1:} : (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$

$k_2 : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$

3.) $x = \left[\frac{ab^2}{a^2+b^2}; \frac{a^2b}{a^2+b^2} \right]$

4.) $t_1 : y = -x + \sqrt{34}$

$t_2 : y = -x - \sqrt{34}$

5.) $x^2 - 3y^2 + 24y - 45 = 0$

6.) $(x-1)^2 = 4(y+6)$

7.) $k : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$

$l : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$

8.) a) hyperbola

$S = [3;7], F = [3-\sqrt{41};7], G = [3+\sqrt{41};7]$

b) elipsa

$S = [3;2], F = [-1;2], G = [7;2]$

9.) a) parabola $V = [0;-2]$

b) hyperbola $S = [3;-2], a = 3, b = 1$

10.) $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 5 = 0$

11.) $x^2 + y^2 - 8y = 0$

12.) $k : x^2 + y^2 - 18x - 12y + 92 = 0$

13.) $x^2 + 18y = 0$

14.) a) $4\sqrt{5}$

b) $l_{1:}$ hlavní osa v ose x:

$x^2 + 6y^2 - 25 = 0$

l_2 hlavní osa v ose y:

$21x^2 + y^2 - 25 = 0$

15.) $t : 4x - y - 6 = 0$

16. Vzájemná poloha přímky a kuželosečky

1. Napište rovnice tečen vedených z bodu A [2, 1] ke kružnici k: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$.

2. Napište rovnice tečen kuželosečky $\frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{24} = 1$ rovnoběžných s přímkou 2x – y +17 = 0.

3. Napište rovnice tečny ke kuželosečce $x^2 - 2x - 4y - 23 = 0$ v bodě T [7, y_0].

4. Určete úhel tečen kružnice k: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 5$ z bodu M$[3,7]$.

5. Napište rovnice tečen kuželosečky $9x^2 + 16y^2 = 144$ kolmých k přímce x + y – 4=0.

6. Pro která reálná čísla p přímka 5x – 2y + 2p = 0
   a) protíná kuželosečku $4x^2 - y^2 = 36$
   b) dotýká se jí
   c) nemá s ní společné body?

7. Napište rovnice tečen z bodu $M = [-8,12]$ k hyperbole xy=12.

8. Napište rovnici kružnice o středu v bodě $S = [5,4]$, dotýkající se přímky
   p: 5x-12y-29=0.

9. Určete reálný parametr d v rovnici přímky p: y + d = 0 tak, aby přímka p byla tečnou kuželosečky $(x+2)^2 + 4.(y-1)^2 = 36$.

10. Vypočítejte souřadnice průsečíků kružnice k: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ s přímkou SP, kde bod S je střed kružnice k a bod P je počátek soustavy souřadnic.

11. Napište obecnou rovnici kružnice, která má střed S $[2,-5]$, jestliže bod dotyku T má souřadnice $[5,-1]$.

12. Napište rovnice tečen kružnice $x^2 + y^2 = 5$, jestliže body dotyku jsou průsečíky této kružnice s přímkou x – 3y + 5 = 0. Určete odchylku tečen.

13. Napište rovnice všech tečen kuželosečky $y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$, které jsou kolmé k přímce x + 3y + 2 =0.

14. Napište rovnice tečen kuželosečky xy = 12, které jsou rovnoběžné s přímkou 3x + 4y – 5 = 0. Vypočtěte souřadnice dotykových bodů.

15. Je dána kuželosečka $3x^2 + 6y^2 = 18$ a bod M$[4,-1]$.
    a) Dokažte, že M je bodem vnější oblasti kuželosečky.
    b) Napište rovnice tečen kuželosečky procházejících bodem M a vypočtěte odchylku těchto tečen.

Výsledky:

1. x + 2y – 4 = 0, 2x – y – 3 = 0
2. 2x – y + $\sqrt{96}$ = 0, 2x – y - $\sqrt{96}$ = 0
3. 3x – y – 18 = 0
4. 36° 52´
5. x – y + 5 = 0, x – y – 5 = 0
6. a) $p \in (-\infty,-4{,}5) \cup (4{,}5;\infty)$ b) $p = \pm 4{,}5$ c) $p \in (-4{,}5;4{,}5)$
7. 3x + y + 12 = 0, 3x + 4y – 24 = 0
8. $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 16$
9. $d_1 = 2, d_2 = -4$
10. $A[6,-3], B[-2,1]$
11. 3x + 4y – 11 = 0
12. 2x – y + 5 = 0, x + 2y – 5 = 0, odchylka = 90°
13. 6x – 2y + 13 = 0
14. 3x + 4y + 24 = 0, 3x + 4y – 24 = 0, $T_1[-4,-3], T_2[4,3]$
15. b) x + y – 3 = 0, x – 5y – 9 = 0, α = 56°18´

17. Analytická geometrie v prostoru

1. Určete vzdálenost bodu A [5, -6, 6] od přímky p, která prochází body B [-2, -5, 4], C [4, 1, 4].

2. Určete průsečnici p rovin ρ a σ. Body A [2, 0, 0] a B [0, 2, 0] pak veďte rovinu τ, která je rovnoběžná s nalezenou průsečnicí p.

   ρ: R [1, 1, -4], $\vec{u} = (0,-1,2)$, $\vec{v} = (-1,2,-1)$,

   σ: P [2, 1, 3], $\vec{m} = (3,2,1)$, $\vec{n} = (-1,-2,1)$.

3. Určete objem čtyřstěnu, jehož vrcholy tvoří průsečíky roviny ρ: 2x + y +2z –8 = 0 se souřadnými osami a počátek soustavy souřadnic.

4. Jsou dány body A [3, 1, 1], B [-1, 2, 0], C [1, 2, 2], D [0, 1, 3] a vektor $\vec{w} = (2,-2,1)$.

   Určete na přímce AB bod P a na přímce CD bod Q tak, aby $\vec{w}$ ležel na přímce PQ.

5. Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, jejich případný průnik, jejich odchylku. $A[1,2,-1], B[3,0,1], C[2,-1,2], D[5,-6,7]$.

6. Určete vzájemnou polohu, popřípadě průnik:
   a) rovin ρ: 5x – 3y +2z – 5 = 0 a σ: 2x –y –z – 1 = 0
   b) přímky PR: P$[6,-3,-5]$, R$[7,-1,-5]$ a roviny τ: x = 3 – r + s, y = 5 + 3s, z = 9 + 4r + 2s, r, s $\in R$

7. Je dán bod K$[2,3,7]$, roviny $\rho: 2x - y + z - 3 = 0$, $\sigma: x + y - z + 8 = 0$. Určete rovinu τ, pro kterou platí: $\tau \perp \rho, \tau \perp \sigma, K \in \tau$.

8. Jsou dány body $A[2,3,5], B[1,7,10]$ a rovina $\rho: 3x - y + 2z - 5 = 0$. Určete rovnici roviny, která prochází body A, B a je kolmá k rovině ρ.

9. Je dán čtyřstěn ABCD: $A[0,1,3], B[1,0,2], C[-2,-1,5], D[0,-2,-6]$.
   Vypočítejte: a) odchylku přímky AD a roviny ABC
   b) odchylku rovin ABC a ABD.

10. Určete bod M´ souměrný k bodu M$[5,1,4]$ podle roviny ρ: 2x – y + z – 1 = 0.

11. Napište parametrickou rovnici přímky a, která prochází bodem A [0,-1,2] a průsečíkem přímky p a roviny ρ. $p \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{array} \right\} t \in R$ s rovinou $\rho \equiv x + 2y + 3z + 4 = 0$.

12. Je dán čtyřstěn A[1,0,2], B[-2,-1,5], C[0,-2,-6], D[0,1,3].
    Určete: a) odchylku přímky DC a roviny DAB
    b) odchylku rovin DAB a ABC
    c) objem čtyřstěnu

13. Určete obecnou rovnici roviny ρ, která prochází body A[6, -7,8] , B[-1,2,3] a je kolmá

k rovině σ: 10x + 4y – 6z + 8 = 0.

14. Napište obecnou rovnici roviny τ, která prochází průsečnicí rovin α, β a je kolmá na rovinu ρ, jestliže $\alpha: x - y + 1 = 0, \beta: 2x + y + z = 0, \rho: 2x + y + z + 3 = 0$.

15. Určete vzájemnou polohu rovin α, β. Jsou- li rovnoběžné, určete jejich průsečnici. Jsou-li roviny rovnoběžné, vypočítejte jejich vzdálenost.
a) $\alpha: x - 4y + 8z + 7 = 0, \beta: x - 4y + 8z - 11 = 0$
b) $\alpha: 3x - 2y - 5z - 4 = 0, \beta: 2x + 3y + z - 7 = 0$
c) $\alpha: 2x - 4y + 6z - 18 = 0, \beta: 3x - 6y + 9z - 27 = 0$

Výsledky:
1. 6 j
2. p: x = t, y = -1 – 4t, z = 3 + 5t t∈ R
3. $\frac{64}{3}$
4. $P[7,0,2]$, $Q[3,4,0]$
5. různoběžky, $P[-1,4,3]$, $\alpha = 12°16'$
6. a) různoběžné, p: x = -2 + 5t, y = -5 + 9t, z = t t∈ R
   b) rovnoběžné
7. y + z – 10 = 0
8. 13x + 17y – 11z – 22 = 0
9. a) 42°9´ b) 64°4´
10. $[-3,5,0]$
11. x = 3k, y = -1 -4k, z = 2 + 7k k∈ R
12. a) 42°8´ b) 64°9´ c) 6 j^3
13. 17x + 46y + 59z – 252 = 0
14. 4x-7y-z=0
15. a) rovnoběžné, v=2 b) různoběžné, p: x = 2 + t, y = 1 – t, z = t, t∈ R
    c) totožné, v = 0

18. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

1. Čtyři studenti a šest studentek , mezi nimiž je Petr a Jana, mají ze svého středu vybrat tříčlennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že Petr nebo Jana budou mezi vylosovanými?

2. Hráč košíkové promění trestný hod s pravděpodobností 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že z 10 trestných hodů promění alespoň 8 hodů?

3. V bedně je 100 žárovek, 5 z nich je vadných. Náhodně vybereme 5 žárovek. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň 4 jsou dobré?

4. Dva střelci zasahují cíl. První s pravděpodobností $p_1 = 0{,}7$, druhý s pravděpodobností $p_2 = 0{,}4$. Určete pravděpodobnost, že:
   a/ oba zasáhnou cíl
   b/ alespoň jeden zasáhne cíl
   c/ první nezasáhne a druhý zasáhne cíl.

5. V populaci, kterou tvoří z 55% ženy a ze 45% muži, trpí danou chorobou 5% mužů a 1% žen. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude trpět touto chorobou?

6. Zařízení se skládá z 10 stejných prvků a funguje, jestliže funguje alespoň 8 z nich. Každý prvek funguje nezávisle na ostatních alespoň 100 hodin s pravděpodobností 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že zařízení funguje alespoň 100 hodin?

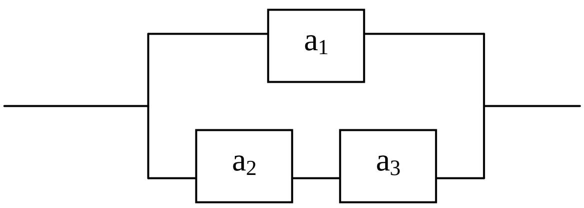
7. Při 4096 hodech 12 kostkami byl v každém hodu zaznamenán počet šestek. Rozdělení četností udává tabulka:

Počet šestek	0	1	2	3	4	5	6	7 a více
Četnost	447	1145	1181	796	380	115	24	8

   Určete aritmetický průměr, modus, medián, směrodatnou odchylku.

8. V množině **N** řešte rovnici: $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$

9. Zařízení se skládá z bloků a_1, a_2, a_3, které nezávisle na sobě fungují s pravděpodobností 0,95 ; 0,90; 0,85. Bloky jsou uspořádány podle schématu na obrázku. S jakou pravděpodobností obvodem poteče proud?



10. Určete počet prvků tak, aby při zvětšení počtu prvků o jeden se počet 3členných kombinací zvětšil o 21.

11. Krychli o objemu 125 cm^3 natřeme modrou barvou a pak ji rozřežeme na krychličky o objemu 1 cm^3 , které vložíme do sáčku. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru 3 z nich vybereme: a) nejvýše jednu s právě 1 modrou stěnou
    b) právě dvě se dvěma modrými stěnami

c) dvě krychličky s jednou modrou stěnou a jednu krychličku nenatřenou
c) jednu krychličku s jednou modrou stěnou, jednu se dvěma modrými stěnami a jednu se třemi modrými stěnami

12. Určete x > 0 tak, aby pátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\right)^{10}$ byl roven 105.

13. Určete počet všech přirozených čísel menších než 5000, v jejichž dekadickém zápisu jsou cifry 1, 3, 5, 7, 9 každá nejvýše jednou.

14. Počet variací třetí třídy s opakováním je o 225 větší než počet variací třetí třídy bez opakování z daných prvků. Kolik je prvků ?

15. Kolika způsoby lze přemístit písmena ve slově MISSISSIPPI ?
Kolik z nich nekončí na písmeno M ?

Výsledky:

1. $\frac{8}{15}$
2. 0,678
3. 0,98
4. a) 0,28 b) 0,82 c) 0,12
5. 0,028
6. 0,93
7. $\bar{x} = 2$, mod(x) = 2, med(x) = 2, s = 1,29
8. $K = \{x \in N, x \geq 2\}$
9. 0, 988
10. 7
11. a) 0,608 b) 0,176 c) 0,12 d) 0,049
12. $\frac{1}{8}$
13. 133
14. 9
15. 34 650, 31 500

19. Posloupnosti a řady

1.a) Dokažte vztah pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti.

b) Dokažte vztah pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti.

2. Řešte rovnici: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt[2^{n-1}]{x} = 2$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nx} = 1$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1} = \frac{4x-3}{3x-4}$

3. Vypočítejte součet všech sudých trojciferných čísel.

4. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku o délce odvěsny a je vepsán trojúhelník tak, že jeho vrcholy jsou středy stran daného trojúhelníku. Do takto vzniklého trojúhelníku je obdobně vepsán další trojúhelník, atd...
   a) Určete součet obvodů všech takto vzniklých trojúhelníků.
   b) Určete součet obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků.

5. Do rovnostranného trojúhelníku o délce strany a je vepsán kruh, do kruhu je vepsán rovnostranný trojúhelník, do něj kruh, atd...
   a) Určete součet obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků.
   b) Určete součet obsahů všech takto vzniklých kruhů.

6. Vyjádřete vzorcem pro n-tý člen posloupnost 4, 7, 10, 13, 16, ….. Najděte rekurentní vzorec pro danou posloupnost.

7. Délky hran kvádru, které vycházejí z jednoho vrcholu, tvoří tři za sebou jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Součet délek těchto hran je 24 cm, objem kvádru je 312 cm^3. Určete délky hran.

8. Určete a_n, s_n v aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí $a_3 + a_7 = 38, a_5 + a_{10} = 58$.

9. Roční přírůstek obce s 85 600 obyvateli činí 1,7%. Kolik obyvatel bude mít při tomto stálém přírůstku obec za 6 let ?

10. Za jak dlouho by se roční produkce továrny zdvojnásobila při pravidelném 10% ročním navýšení ?

11. Daná čísla převeďte na zlomek: $a = 0{,}23\overline{48}$, $b = 1{,}4\overline{136}$

12. Vypočtěte**:**

$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4 \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+....+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right) \qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+..........+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+.........+\frac{1}{3^n}}$

13. Součet prvních čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete je, víte-li, že čtvrtý je devětkrát větší než druhý.

14. Číslo 55 vyjádřete jako součet pěti čísel, z nichž každé následující je o 4 větší než předcházející. Která jsou to čísla?

15. V geometrické posloupnosti platí: $a_1 + a_2 = 4$, $a_2 - a_4 = -24$. Určete a_1, q.

Výsledky:
2. a) 10 b) -1 c) 6
3. 247 050
4. a) 2a.(2+$\sqrt{2}$) b) $\frac{2a^2}{3}$
5. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$ b) $\frac{\pi . a^2}{9}$
6. $a_1 = 4, d = 3, a_n = a_1 + (n-1).3, a_1 = 4$
$a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 4$
7. a = 3 cm, b = 8 cm, c = 13 cm.
8. $a_n = 4n - 1, s_n = 2n^2 + n$
9. 94 710
10. 7,3 roku
11. a) $\frac{31}{132}$ b) $\frac{7061}{4995}$
12. a) $\frac{1}{16}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{3}$
13. -4, 12, -36, 108
14. 3, 7, 11, 15, 19
15. $a_1 = 1, q = 3$
$a_1 = -4, q = -2$

20. Limita funkce

1. Vypočtěte: a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 2x - 3} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x + tg^2 x}{x \cdot \sin x} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} =$

e) $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \cot g 3x) =$

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x} =$

g) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + x^2 - 2x - 2} =$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} =$

i) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} =$

j) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} =$

2. Určete ke grafu funkce $f : y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ a) asymptoty se směrnicí

b) asymptoty bez směrnice

Výsledky:

1. a) $-\frac{1}{2}$ b) 8 c) 3 d) 2 e) $\frac{1}{3}$ f) $-\sqrt{2}$ g) 4

h) $\frac{1}{4}$ i) cos a j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. y = x, x = -1

21. Derivace funkce

1. Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu bylo ochlazování páry ve válci co nejmenší (tj. aby jeho povrch byl minimální). Porovnejte pak výšku válce a poloměr podstavy.

2. Od světelného bodového zdroje A je ve vzdálenosti *a* střed koule o poloměru *x*, *x*<a. Určete poloměr *x* koule tak, aby z bodového zdroje A osvětlený kulový vrchlík měl co největší plochu.

3. Napište rovnici tečny grafu funkce y v bodě $T = [x_{0,} y_0]$.

$$a) \quad y = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}, \quad x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$b) \quad y = x \ln x, \quad x_0 = e$$

4. Určete první derivaci funkce:

$$a) \quad y = x^2 \sqrt{1 + x^2}$$

$$b) \quad y = \sin 2x \cdot \cos 2x$$

5. Určete intervaly, ve kterých je funkce $f : y = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$ rostoucí (klesající).

6. Do koule o poloměru *r* vepište válec o maximálním objemu.

7. Napište 1. derivaci funkce $y = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x)^2}$

8. Napište rovnici tečny a normály ke křivce f: $y = 2x - \ln x$ v jejím bodě T$[1, ?]$.

9. Urči intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí nebo klesající f: $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

10. Nádrž na věži se skládá z válce o výšce délky a. Válec je dole ukončen kuželem o témže poloměru podstavy r a o straně délky $3a$. Určete délku výšky kužele x a poloměru r tak, aby nádrž měla maximální objem.

Výsledky:

1. v = 2r
2. x = $\dfrac{2a}{3}$
3. a) 2x +y + 2 = 0 b) 2x – y – e = 0
4. a) $\dfrac{x\left(3x^2 + 2\right)}{\sqrt{1 + x^2}}$ b) 2.cos 4x
5. rost.: $(0,1),(1,\infty)$ kles. $(-\infty,-1),(-1,0)$
6. v = $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

7. $y' = \frac{2(x+1)}{(1-x)^3}$

8. tečna: y = x + 1,   normála: y = -x + 3

9. rostoucí: $(-\infty,-2), \left(-2,0\right\rangle$,   klesající: $\left\langle 0,2\right)$, $(2,\infty)$

10. x = a, r = $2\sqrt{2}.a$

22. Průběh funkce

Určete průběh funkce:

1. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

2. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

3. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

4. $y = x^3 - 3x^2 - 10x$

5. $y = e^{x^2}$

6. $y = 5x^3 - 3x^5$

7. $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

8. $y = \dfrac{x^3}{(x - 1)^2}$

9. $y = \ln \dfrac{e^x}{1 - x^2}$

23. Primitivní funkce

1. Vypočítejte integrály:

$$a)\quad \int e^x \sin x\, dx =$$

$$b)\quad \int \cos 2x\, dx =$$

$$c)\quad \int x^2 \sin x\, dx =$$

$$d)\quad \int \frac{3\ln x}{x}\, dx =$$

$$e)\quad \int \sin^3 x\, dx =$$

$$f)\quad \int 5xe^{x^2}\, dx =$$

$$g)\quad \int \frac{1}{2}\ln x\, dx =$$

$$h)\quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x\, dx =$$

$$i)\quad \int_1^4 \sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}\right)dx =$$

$$j)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$k)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx =$$

2. Vypočítejte obsah rovinného útvaru omezeného křivkami:

$$a)\quad y=(x+1)^2,\quad y=1-x,\quad y=0,\quad x\in\langle -1,1\rangle$$

$$b)\quad y=\frac{1}{3}x^2,\quad 2x-3y+3=0$$

$$c)\quad y=x^2+2,\quad y=0, x=0, x+y-8=0$$

Výsledky:

1. a) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$

b) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

c) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$

d) $3.\frac{\ln^2 x}{2}+c$

e) $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+c$

f) $\frac{5}{2}e^{x^2}+c$

g) $\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{2}x+c$

h) $\frac{7}{24}$

i) $\frac{52}{3}$

j) $2-\frac{\pi}{4}$

k) $\frac{1}{2}$

2. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{32}{9}$ c) $\frac{76}{3}$

24. Matematické důkazy

1. Dokažte:

   a) $\sqrt{2}$ není racionální číslo

   b) $\sqrt{3}$ není racionální číslo

2. Dokažte:

   $a)\quad A - B = A \cap B'$

   $b)\quad (A \cup B)' = A' \cap B'$

3. Dokažte, že pro $\forall n \in N$ platí:

   a) $3 \perp n^4 + 2 \Rightarrow 3 | n$ nepřímo

   b) $5 | n^2 \Rightarrow 5 | n$

   c) $3 | n^3 + 2n$ aspoň dvěma typy důkazů

   d) $6 | n^3 + 11n$

4. Dokažte, že pro $\forall k \in N, k > 1$, je jedno z čísel $k, k^2 + 1, k^2 - 1$ dělitelné pěti.

5. Dokažte matematickou indukcí, že číslo $M = 10^x + 2, \quad x \in N$ je dělitelné šesti.

6. Dokažte:

   $a)\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   $b)\quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

   $c)\quad \dfrac{0}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} .... + \dfrac{n-1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!}$

25. Praktická aplikace infinitezimálního počtu

1. Zjistěte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu 32m^3 tak, aby na vyzdění stěn a dna bylo třeba co nejmenší množství materiálu.

2. Pořizovací náklady elektrického vedení jsou závislé na průřezu S vedení a na ztrátách elektrického proudu ve vedení podle vztahu $y = k_1 S + \frac{k_2}{S}$, kde k_1, k_2 jsou kladné konstanty. Určete průřez S tak, aby pořizovací náklady byly minimální.

3. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kulové úseče.

4. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou *v*.

5. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu koule.

6. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele o poloměru *r* a výšce *v*.

7. Jestliže při chemické reakci dvou látek vstupuje u obou látek do reakce A grammolekul, přemění se x grammolekul za t sekund podle vztahu $x = A\left(1 - e^{-kt}\right)$, kde k je konstanta reakční rychlosti. Určete rychlost reakce v.

8. Daný typ bakterií se rozmnožuje tak, že se vždy za půl hodiny každá bakterie rozdělí na dvě. Kolik bakterií takto vznikne za 24 hodin?

9. Jak rychle se mění tlak plynu p s objemem V, platí-li: $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = k$,

   kde a, b, k jsou konstanty? $\left[p' = \frac{dp}{dV}\right]$

10. V noci se teplota měnila podle vztahu $t = h^2 - 5h + 4$, kde h je čas v hodinách po půlnoci. Načrtněte graf pro $0 \le h \le 6$.
    a) Kolik stupňů bylo v 5 hodin ráno?
    b) V kolik hodin ukazoval teploměr -2°C?
    c) Kdy byla teplota $t < 0$, $t = 0$, $0 < t$?
    d) V kolik hodin byla teplota nejnižší?